



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۵۴۰۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی ۲ یازدهم تجربی

تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۰۳/۰۳



دبیرستان نورا

۱) به ازای کدام مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

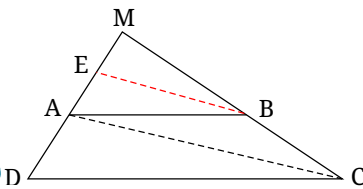
- ۱) $m < -6$
 ۲) $m > 3$
 ۳) $0 < m < 3$
 ۴) $3 < m < 6$

۲) به ازای کدام k مجموعه جواب معادله‌ی زیر برابر $A = \{-2\}$ می‌باشد؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{38}{k} = \frac{3x}{x+1}$$

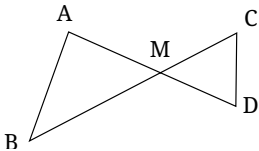
- ۱) ۳
 ۲) ۴
 ۳) ۵
 ۴) ۶

۳) در دوزنقه‌ی $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟



- ۱) ۱۲
 ۲) ۱۲٫۲۵
 ۳) ۱۲٫۵
 ۴) ۱۲٫۷۵

۴) در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$ می‌باشد. نسبت مساحت‌های دو مثلث در شکل کدام است؟



- ۱) $\frac{2}{3}$
 ۲) $\frac{2}{5}$
 ۳) $\frac{4}{9}$
 ۴) $\frac{9}{25}$

۵) کدام گزینه غلط است؟

- ۱) نمودار هر تابع به شکل خط راست (غیرافقی) یک‌به‌یک است.
 ۲) نمودار هر تابع به شکل سهمی یک‌به‌یک نیست.
 ۳) تابع پله‌ای می‌تواند یک‌به‌یک باشد.
 ۴) تابع چند ضابطه‌ای می‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۶) اگر $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$ و $g = \{(2, 3), (5, 1)\}$ ، مجموعه‌ی $f + 2g$ کدام است؟

- ۱) $\{(2, 11)\}$
 ۲) $\{(2, 7)\}$
 ۳) $\{(1, 4), (2, 7)\}$
 ۴) $\{(1, 4), (2, 11)\}$

۷) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ باشد $D_{f \times g}$ کدام است؟

- ۱) $[-2, -1] \cup [1, 2]$
 ۲) $\mathbb{R} - [-2, +2]$
 ۳) $\mathbb{R} - [-1, +1]$
 ۴) \emptyset



۸) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) -۴

۹) حداکثر مقدار تابع $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$ در چه طول‌هایی رخ می‌دهد؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۲) $2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۰) نمودار $y = \log_{0.25}^{(x+1)}$ به کدام صورت است؟



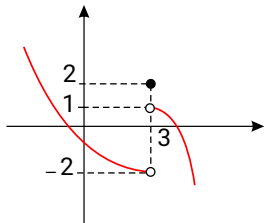
۱۱) حاصل $\log_{\frac{1}{4}}^{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{4}}$ چقدر است؟

- ۱) $\frac{11}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{19}{24}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۱۲) از معادله‌ی لگاریتمی $\log_p^{(2x^r+1)} - \log_p^{(x+r)} = 1$ مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۳) شکل مقابل نمودار تابع f است حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3)$ کدام است؟



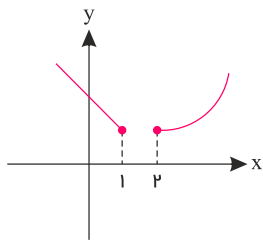
- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۴) تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در کدام نقطه حد ندارد؟

- ۱) $x = 1$ ۲) $x = 0$ ۳) $x = -1$ ۴) در همه‌ی نقاط حد دارد.

۱۵) در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+a)[x]$ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۰



۱۶) نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در چه بازه‌هایی پیوسته است؟

- ۱) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ ۲) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ۳) \mathbb{R} ۴) $[1, +\infty)$

۱۷) خانواده‌ای دارای چهار فرزند است می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{3}{8}$

۱۸) احتمال قبولی فرد A در یک آزمون 0.84 و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون 0.75 است. با کدام احتمال لاقبل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

- ۱) 0.92 ۲) 0.94 ۳) 0.96 ۴) 0.98

۱۹) داده‌های زیر تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز قبل از مسابقه دو است. اختلاف میانه و میانگین این داده‌ها کدام است؟

۱۰۰, ۹۱, ۸۲, ۷۵, ۱۰۷, ۹۸, ۹۸, ۱۰۱, ۸۹, ۹۲, ۹۷, ۸۶

- ۱) صفر ۲) 1.5 ۳) 2 ۴) 2.5

۲۰) در 60 داده‌ی آماری، میانگین 3 و انحراف معیار 1.2 محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها 9 واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- ۱) 0.1 ۲) 0.2 ۳) 0.3 ۴) 0.4



پاسخنامه تشریحی

شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

تعیین علامت

$$\rightarrow m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \frac{3m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می‌رسیم.

برای محاسبه کفایت $x = -2$ را در معادله جایگذاری نماییم: (۱) (۲) (۳) (۴)

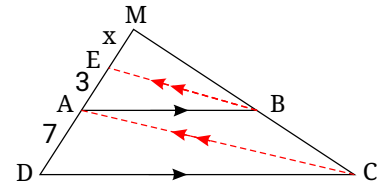
$$\frac{1}{-2-1} + \frac{38}{k} = \frac{-6}{-1} \rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{38}{k} = 6$$

$\times 3k$

$$\rightarrow -k + 114 = 18k \rightarrow 19k = 114 \rightarrow k = 6$$

کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{cases} \triangle MAC : BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MD C : AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$



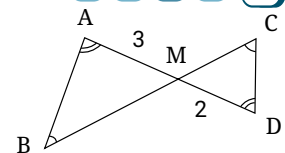
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x = 3x+9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2,25$$

در نتیجه: $MD = 2,25 + 3 + 7 = 12,25$

تذکر: وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست. (۱) (۲) (۳) (۴)

$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



تابع پله‌ای یک‌به‌یک نیست، چون دارای تعدادی خط افقی است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶)

تمام عملیات جبری، روی مولفه‌ی دوم انجام می‌شود.

$$f = \{(1,3)(2,5)\} \Rightarrow f + 2g = \{(2,11)\}$$

$$2g = \{(2,6)(5,2)\}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 4 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

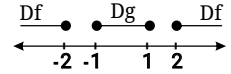
$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۷)

پس باید ابتدا دامنه‌ی f و g را تعیین نماییم



$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \emptyset$$



- 1 2 3 4 8

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

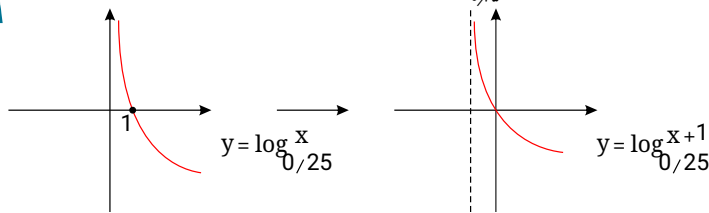
تک تک جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم

دقت کنید که عدد -1 در ضابطه تابع فقط تابع را 1 واحد پایین می‌آورد. بنابراین طول نقطهٔ ماکسیمم را تغییر نخواهد داد. ضمناً می‌دانیم تابع $\cos x$ در $x = 2k\pi$ حداکثر می‌شود.

باید $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ باشد، پس:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

از انتقال نمودار $y = \log_{0,25}^x$ به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ محور x ها، نمودار $y = \log_{0,25}^{x+1}$ حاصل می‌شود.



- 1 2 3 4 11

می‌دانیم: $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} + \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} + \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

- 1 2 3 4 12

می‌دانیم: $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$, $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x^2+1}} - \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x+2}} = 1 \rightarrow \log_{\sqrt{e}}^{\frac{\sqrt{e}^{x^2+1}}{\sqrt{e}^{x+2}}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{\sqrt{e}^{x^2+1}}{\sqrt{e}^{x+2}} = \sqrt{e}^1$$

$$\rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی $\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x-1}}$ فقط به جای x ، می‌توانیم مقدار $x = \frac{5}{2}$ را جایگزین کنیم، زیرا $x = -1$ جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x-1}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{\left(\frac{5}{2}\right)-1}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} = \frac{2}{3}$$



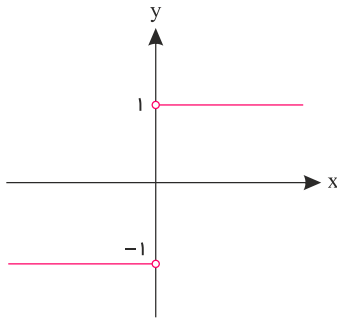
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2$$

جمع این سه مقدار برابر یک می شود.

راهنمایی: می توانید این تابع را به شکل تابعی دو ضابطه ای بنویسید و آن را رسم کنید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

اول: دقت کنید که $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ پس نمودار f به شکل روبه رو است.



دوم: معلوم است این تابع در همه نقاط جز $x = 0$ حد دارد. در این نقطه حد چپ و راست برابر نیستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

دقت کنید که در $x = 1$ برای پیوستگی، پیوستگی چپ کفایت و همچنین برای پیوستگی در نقطه $x = 2$ ، پیوستگی راست کفایت. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$S_{\text{جدید}} = \{PPPD, PPDP, PPDD, PPPP\} \Rightarrow n(S) = 4, A = \{PPDD\} \Rightarrow n(A) = 1$$

پس $P(A) = \frac{1}{4}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$P(\underbrace{A \cup B}_{\text{لااقل یکی}}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A, B مستقل هستند.

$$\longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,84 + 0,75 - \underbrace{(0,84)(0,75)}_{0,63} = 0,96$$

برای پیدا کردن میانه، داده ها را به شکل صعودی مرتب می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

۷۵, ۸۲, ۸۶, ۸۹, ۹۱, ۹۲, ۹۷, ۹۸, ۹۸, ۱۰۰, ۱۰۱, ۱۰۷

$$\Rightarrow \text{میانه} = \frac{92 + 97}{2} = 94,5$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} = \frac{1116}{12} = 93$$

تفاضل میانگین از میانه $1,5 = 94,5 - 93$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 9} = \frac{1,2}{3 + 9} = \frac{1,2}{12} = \frac{1}{10}$$

به داده ها ۹ واحد اضافه کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند ولی به میانگین ۹ واحد اضافه می شود.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴