

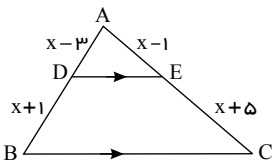
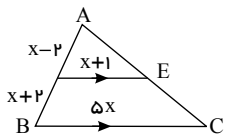
۱- ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمود منصف پاره خط AB از نقاط A, B به یک فاصله است.

۲- عکس قضیه‌ی زیر را بیان کنید و سپس در صورت امکان آن را دوشرطی بنویسید و در صورت غیرممکن بودن مثال نقض بیاورید. قضیه: «دو زاویه‌ی قائمه مکمل هستند.»

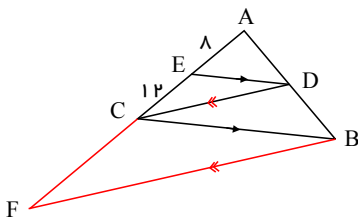
۳- ثابت کنید هر سه عمود منصف تمام مثلث‌ها هم‌مرس هستند.

۴- ثابت کنید در هر مثلث نسبت ارتفاعها با عکس نسبت اضلاع متناظر آنها برابر است؟

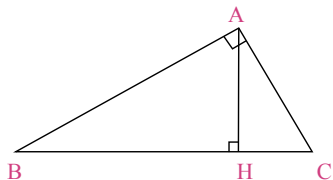
۵- در شکل‌های زیر $DE \parallel BC$ است. مقادیر x را بدست آورید.



۶- در شکل مقابل $ED \parallel BC$ و $DC \parallel BF$ و $AE = ۸$ و $CE = ۱۲$ اندازه CF را بدست آورید.



۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



$BH = ۹, CH = ۴, AH = ?, AB = ?, AC = ?$

$AB = ۱۰, BC = ۱۲, AC = ?, AH = ?$

$AB = ۸, AC = ۶, BH = ?, CH = ?$

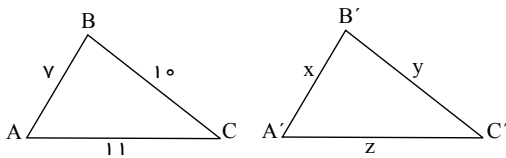
$AB = ۸, AH = ۴, BC = ?, AC = ?$



۸- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و اضلاع ABC برابر ۷ و ۱۰ و ۱۱ می‌باشد، اگر محیط مثلث $A'B'C'$ برابر 70 cm باشد.
الف) اضلاع مثلث $A'B'C'$ را بدست آورید.

ب) نسبت مساحت‌های دو مثلث را محاسبه کنید.

ج) نسبت میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌های نظیر را در دو مثلث بدست آورید.



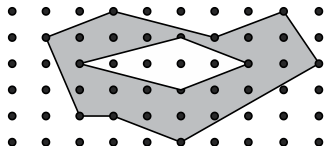
۹- طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

۱۰- ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

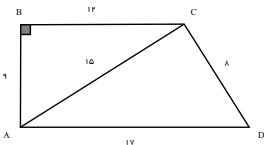
۱۱- در کدام n ضلعی، تعداد قطر‌ها و ضلع‌ها برابر است؟

۱۲- ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث برابر ارتفاع مثلث می‌شود.

۱۳- مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید.



۱۴- مساحت چهارضلعی مقابل را بدست آورید.



۱۵- ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند برابر نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

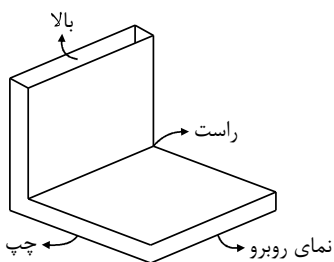
۱۶- حالت‌های مختلف دو صفحه در فضا را مشخص کنید.

۱۷- خط عمود بر یک صفحه را تعریف کنید.

۱۸- اوضاع نسبی یک خط و یک صفحه را در فضا با رسم شکل مشخص کنید.

۱۹- حالت‌های مختلف دو خط در فضا را با رسم شکل بیان کنید.

۲۰- نمای بالا، روبرو، چپ و راست جسم مقابل را رسم کنید.



۲۱- یک مخروط را با یک صفحه برش می‌دهیم. سطح مقطع چه شکلی می‌تواند باشد؟ رسم کنید.

۲۲- جسم حاصل از دوران‌های زیر را رسم کنید.

ب) دوران نیم دایره حول قطر آن

د) دوران مربع حول قطر آن

الف) مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه

ج) دوران مربع حول یک ضلع



پاسخنامه تشریحی

- ۱

$$PC \text{ عمود منصف است} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 90^\circ \\ AC = BC \\ PC = PC \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \triangle APC \cong \triangle BPC \rightarrow PA = PB$$

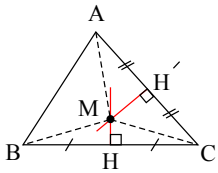
از طرفی PC در دو مثلث ACP, BCP مشترک است پس دو مثلث ACP, BCP همنهشت هستند طبق حالت (ض.ض.ض). بنابراین $PA = PB$

۲ - قضیه: دو زاویه قائمه مکمل هستند. \leftarrow دو زاویه مکمل قائمه هستند. نادرست
مثال نقض:

$$\hat{A} = 40^\circ, \hat{B} = 140^\circ \quad \hat{A} + \hat{B} = 40^\circ + 140^\circ = 180^\circ$$

دو زاویه A و B مکمل هستند ولی هیچ کدام قائمه نیستند.

۳ - می‌دانیم دو عمودمنصف هر دو ضلع دلخواه مثلث حتماً متقاطع‌اند، بنابراین عمود منصف‌های اضلاع AC و BC هم‌دیگر را در نقطه‌ی M قطع می‌کنند. اگر عمودمنصف AB نیز از نقطه‌ی M بگذرد قضیه اثبات شده است.



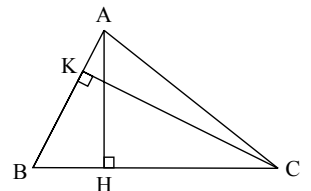
از M به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} (M \text{ روی عمودمنصف } AC) : MA = MC \\ (M \text{ روی عمودمنصف } BC) : MB = MC \end{array} \right\} \rightarrow MA = MB$$

یعنی M روی عمودمنصف AB است چون از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

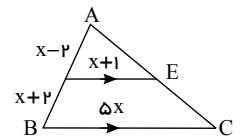
- ۴

$$\begin{aligned} \text{حکم: } \frac{AH}{CK} &= \frac{AB}{BC} \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} CK \times AB \\ \Rightarrow AH \times BC &= CK \times AB \Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{AB}{BC} \end{aligned}$$



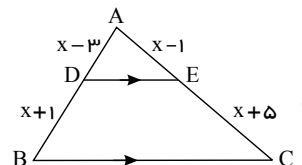
- ۵

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{x-2}{2x+2-2} = \frac{x+1}{5x} \Rightarrow 5x^2 - 10x = 2x^2 + 2x$$



$$\Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ ق.ق} \\ x=4 \text{ ق.ق} \end{array} \right.$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x-1}{x+5}$$



$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel BC \xrightarrow{\text{ق.تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ DC \parallel BF \xrightarrow{\text{ق.تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CF} = \frac{8+12}{CF} = \frac{20}{CF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{20}{CF} = \frac{2}{3} \Rightarrow CF = 30$$

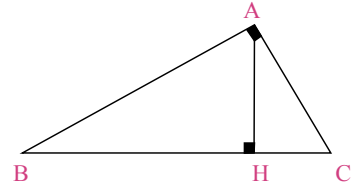
- ۷



1) $BH = 9, CH = 4, AH = ?, AB = ?, AC = ?$

اثبات: در تمام موارد سه مثلث زیر متشابه هستند (ز)

$$\triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$$



$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AH^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$\triangle ACH : AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC^2 = 6^2 + 4^2 = 52 \Rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (9+4)^2 = AB^2 + (2\sqrt{13})^2 \Rightarrow AB^2 = 169 - 52 = 117 \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}$$

2) $AB = 10, BC = 12, AC = ?, AH = ?$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 12^2 = 10^2 + AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{1}{2} \times 10 \times 2\sqrt{11} = \frac{1}{2} \times AH \times 12 \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{12} = \frac{AH}{10} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{11}}{3}$$

3) $AB = 8, AC = 6, BH = ?, CH = ? \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$

$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CH}$$

ترکیب در صورت
ترکیب درمخرج

$$\frac{AB}{AB+AC} = \frac{BH}{\frac{BH+CH}{BC}} \Rightarrow \frac{8}{8+6} = \frac{BH}{10} \Rightarrow BH = \frac{40}{13} \Rightarrow CH = 10 - \frac{40}{13} = \frac{90}{13}$$

4) $AB = 8, AH = 4, BC = ?, AC = ?$

$$\triangle ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 8^2 = 4^2 + BH^2 \Rightarrow BH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ABH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{8}{AC} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{8}{AC} = \frac{4}{CH} \Rightarrow AC = ??$$

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

$$8^2 = 4\sqrt{3} \times BC \Rightarrow BC = \frac{16\sqrt{3}}{3} \rightarrow CH = \frac{16\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$AH^2 = BH \times CH = 4\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = 16 \Rightarrow AH = 4$$

روش اول:

روش دوم:

۸ - الف)

$$ABC \text{ محیط} = 7 + 10 + 11 = 28 \text{ cm می دانیم} \Rightarrow \text{نسبت محیطها} = \text{نسبت اضلاع} \Rightarrow \frac{7}{x} = \frac{10}{y} = \frac{11}{z} = \frac{28}{70} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow x = 17,5 \text{ cm} \quad , \quad y = 25 \text{ cm} \quad , \quad z = 27,5 \text{ cm}$$

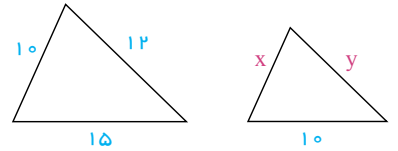
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \left(\frac{7}{17,5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$= \frac{2}{5} = \text{نسبت تشابه} = \text{نسبت ارتفاعها} = \text{نسبت نیمسازها} = \text{نسبت میانها}$$

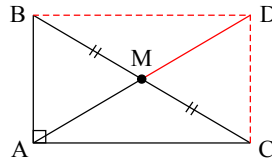


$$\Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{12}{y} = \frac{15}{10} \Rightarrow x = \frac{20}{3}, y = 8$$

$$\text{محیط} = \frac{20}{3} + 10 + 8 = \frac{20 + 3 \times 18}{3} = \frac{74}{3}$$



۱۰ - عکس سؤال بالاست.



فرض: $MB = MC$

$$\text{حکم: } AM = \frac{BC}{2}$$

از نقطه B موازی AC و از C موازی AB رسم می‌کنیم تا مستطیل $ABDC$ حاصل شود. می‌دانیم در مستطیل قطرها برابر بوده و همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی:

$$AD = BC \rightarrow MB = MC \rightarrow \text{وسط } M \text{ در } BC \rightarrow \text{وسط } M \text{ در } AD \rightarrow MA = MD$$

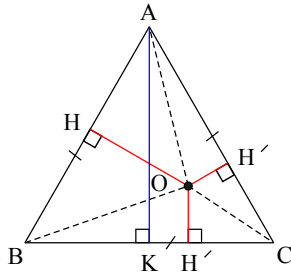
$$AM = MB = \frac{BC}{2} \text{ چون دو قطر برابرند پس نصف دو قطر نیز برابرند، یعنی:}$$

- ۱۱

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow n^2 - 3n = 2n \Rightarrow n^2 - 5n = 0 \Rightarrow n(n-5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 & \text{غ ق ق} \\ n = 5 & \text{در ۵ ضلعی} \end{cases}$$

- ۱۲



فرض: $AB = AC = BC$

(ارتفاع مثلث) $OH + OH' + OH'' = AK$ حکم:

اثبات از O به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{AK \times BC}{2} = \frac{OH \times AB}{2} + \frac{OH' \times BC}{2} + \frac{OH'' \times AC}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} AK \left(\frac{BC}{2} \right) = OH \times \left(\frac{BC}{2} \right) + OH' \times \left(\frac{BC}{2} \right) + OH'' \times \left(\frac{BC}{2} \right)$$

از $\frac{BC}{2}$ فاکتور می‌گیریم.

$$AK \times \left(\frac{BC}{2} \right) = (OH + OH' + OH'') \times \left(\frac{BC}{2} \right)$$

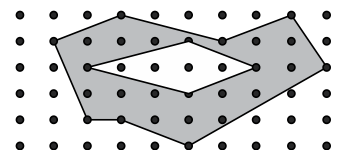
$$AK = OH + OH' + OH''$$

- ۱۳

$$S_{\text{بزرگ}} = \frac{\text{تعداد نقاط مرزی}}{b} + i - 1 = \frac{9}{2} + 21 - 1 = 24,5$$

$$S_{\text{کوچک}} = \frac{4}{2} + 4 - 1 = 5$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = 24,5 - 5 = 19,5$$



۱۲ - از A به B وصل می‌کنیم.

$$\triangle ABC : \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{225} = 15$$

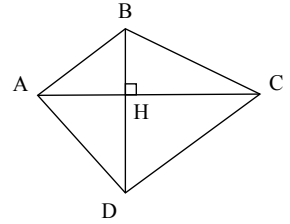
$$\triangle ACD : \left. \begin{matrix} 17^2 = 289 \\ 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} \text{مثلث } ACD \text{ قائم‌الزاویه است} \Rightarrow \hat{ACD} = 90^\circ$$



$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 + \frac{1}{2} \times 15 \times 8 = 54 + 60 = 114$$

- ۱۵

حکم: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AC \times BD)$

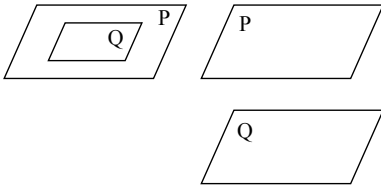


$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}BH \times AC + \frac{1}{2}DH \times AC$$

$$= \frac{1}{2}AC(BH + DH) = \frac{1}{2}AC \times BD$$

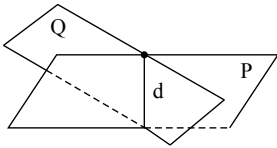
۱۶ - الف) دو صفحه در فضا اگر برهم منطبق باشند و یا اگر هرگز همدیگر را قطع نکنند موازی می‌گویند.

$$P \parallel Q$$



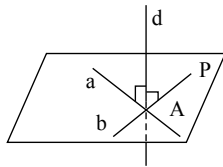
ب) اگر دو صفحه در یک خط مشترک باشند دو صفحه را متقاطع می‌نامند.

$$P \cap Q = d$$



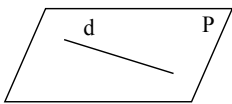
۱۷ - اگر خطی بر دو خط متقاطع از یک صفحه در نقطه تقاطع عمود باشد خط را بر صفحه عمود می‌گویند.

$$\left. \begin{array}{l} d \perp a, \quad d \perp b \\ a, b \subseteq P, \quad a \cap b \cap d = A \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp P$$



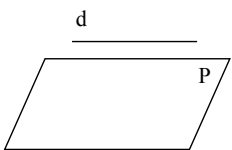
۱۸ - الف) خط بر صفحه منطبق باشد (خط روی صفحه باشد).

$$d \subseteq P$$



ب) خط هرگز صفحه را قطع نکند و با صفحه موازی باشد.

$$d \parallel P$$

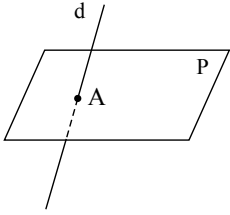


ر: دو حالت بالا خط و صفحه را موازی می‌نامند.

ج) خط و صفحه همدیگر را در یک نقطه قطع کنند (متقاطع باشند).

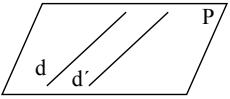


$$d \cap P = A$$



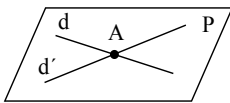
۱۹ - الف) موازی: دو خط در یک صفحه بوده و هرگز همدیگر را قطع نمی‌کنند.

$$d, d' \subseteq P, \quad d \parallel d'$$



ب) متقاطع: دو خط در یک صفحه بوده و در یک نقطه مشترک باشند.

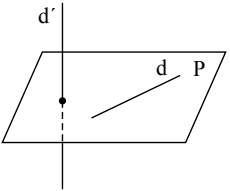
$$d, d' \subseteq P, \quad d \cap d' = A$$



ج) متناظر: دو خط همدیگر را هرگز قطع نمی‌کنند و در یک صفحه نمی‌گنجد.

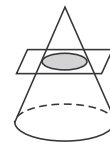
$$d \subseteq P, \quad d' \not\subseteq P$$

$$d \cap d' = \emptyset$$

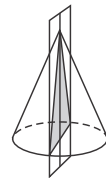


۲۰ - ابتدا باید یک طرف را به عنوان نمای روبرو و روبرو انتخاب کنیم سپس رسم کنیم.

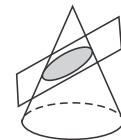
نمای بالا	نمای روبرو	نمای چپ	نمای راست



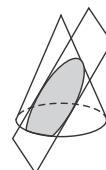
۲۱ - الف) موازی قاعده باشد دایره است.



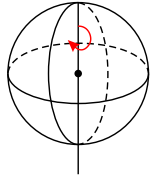
ب) عمود بر قاعده از رأس برش دهد: مثلث



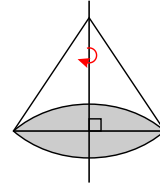
ج) مایل برش دهد، بیضی می‌شود.



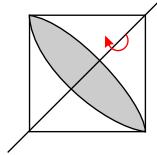
د) مایل برش دهد از قاعده عبور کند، سهمی می‌شود.



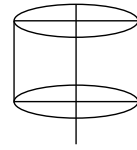
(ب) یک کره تشکیل می‌شود.



(الف) یک مخروط می‌شود.



(د) دو مخروط از قاعده به هم چسبیده تشکیل می‌شود.



(ج) یک استوانه تشکیل می‌شود.