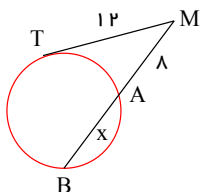


۱- الف) اندازه مماس مشترک خارجی در دو دایره  $C(O, 7)$  و  $C'(O', 1)$  را با فرض  $OO' = 10$  تعیین کنید.

ب) این دو دایره چند مماس مشترک خارجی دارند؟

۲- با توجه به شکل زیر، مقدار  $x$  را تعیین کنید.



۳- در حالتی که پاره خط  $AB$  در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر  $A'B'$  بازتاب  $AB$  باشد،  $A'B'$  هم اندازه‌اند.

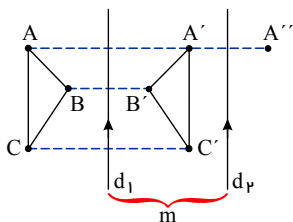
۴- در شکل،  $d_1$  به موازات  $d_2$  و به فاصله  $m$  از آن قرار دارد و مثلث  $A'B'C'$  بازتاب مثلث  $ABC$  نسبت به خط  $d_1$  است. بازتاب مثلث  $A'B'C'$  را

نسبت به خط  $d_2$  رسم کنید و آن را  $A''B''C''$  بنامید.

الف) نشان دهید:  $AA'' = 2m$

ب) اندازه  $BB''$  و  $CC''$  چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث  $A''B''C''$  را تصویر  $ABC$  دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

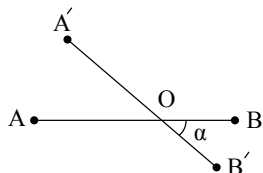


۵- اگر  $r_a, r_b, r_c$  شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و  $r$  شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:  $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

به همین ترتیب اگر  $h_a, h_b, h_c$  اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

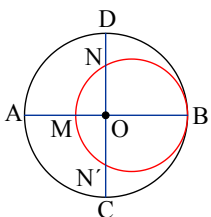
۶- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۷- در شکل مقابل، ثابت کنید دوران طولپا است.



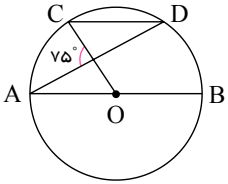
۸- ثابت کنید بازتاب محوری در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۹- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر  $AB$  و  $CD$  از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر  $AM = 16$  و  $ND = 10$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.





۱۰- در دایره رسم شده شکل مقابل  $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان  $CD$  را به دست آورید.





## پاسخنامه تشریحی

۱ - الف)  $R = ۷$

$$R' = ۱ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \rightarrow TT' = \sqrt{۱۰^2 - (۷ - ۱)^2} \rightarrow TT' = ۸$$

$$d = ۱۰$$

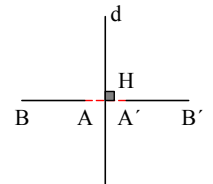
ب) دو مماس

$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow ۱۲^2 = ۸ \times (۸ + x) \Rightarrow x = ۱۰$$

$$AB \perp d, H = ۹۰^\circ$$

$$AH = A'H, BH = B'H$$

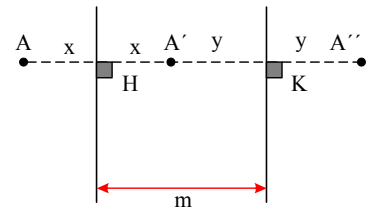
$$\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



۴ -

$$AH = A'H = x, A'K = A''K = y, x + y = m$$

$$AA'' = 2(x + y) = 2m$$



به همین ترتیب داریم:

$$BB'' = CC'' = 2m$$

می توان نتیجه گرفت که  $A''B''C''$  تصویر  $\Delta ABC$ ، نتیجه انتقالی با بردار  $2m$  و راستای عمود بر محورهای بازتاب می باشد.

۵ -

که در فرمول های مقابل  $S$  مساحت و  $p$  نصف محیط می باشد.

$$r_a = \frac{s}{p-a}, r_b = \frac{s}{p-b}, r_c = \frac{s}{p-c}, r = \frac{s}{p}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{s}{p-a}} + \frac{1}{\frac{s}{p-b}} + \frac{1}{\frac{s}{p-c}} = \frac{p-a+p-b+p-c}{s} = \frac{3p-2p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

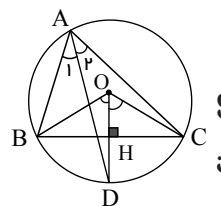
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow h_a = \frac{2s}{a}, h_b = \frac{2s}{b}, h_c = \frac{2s}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{a+b+c}{2s} = \frac{2p}{2s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

۶ - عمود منصف  $BC$  از  $O$  مرکز دایره محیطی می گذرد. داریم:

$$\widehat{BOH} = \widehat{COH} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{BD} = \widehat{CD}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{BD} = \widehat{CD}$$



نابراین محل برخورد نیمساز زاویه  $A$  وسط کمان  $BC$  می باشد که همان محل برخورد عمود منصف  $BC$  با محیط دایره می باشد.

۷ - مطابق شکل، مرکز دوران نقطه  $O$  روی  $AB$  است و زاویه دوران  $\alpha$  می باشد، داریم:

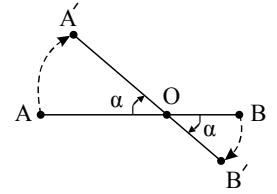


$$AB = AO + OB$$

$$A'B' = A'O + OB'$$

$$AO = A'O, OB = OB' \Rightarrow AB = A'B' \quad (1)$$

طبق خواص دوران

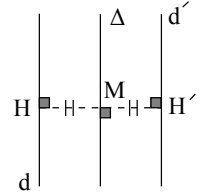


- ۸

در دو حالت بررسی می‌کنیم.

الف. در این حالت محور بازتاب  $(\Delta)$  با خط  $d$  موازی است و در نتیجه بازتاب خط  $d$  (خط  $d'$ ) با آن موازی می‌باشد:

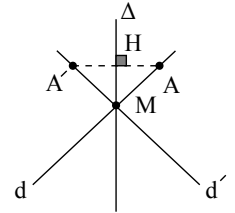
$$\widehat{M} = \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ, MH = MH' \Rightarrow d \parallel \Delta \parallel d'$$



در این حالت شیب خط حفظ می‌شود (چون  $d \parallel d'$  است).

ب. در این حالت خط  $d$  و محور بازتاب  $(\Delta)$  متقاطع‌اند. بازتاب خط  $d$  نسبت به محور  $\Delta$ ، خط  $d'$  می‌باشد و  $d'$  و  $d$  در نقطه  $M$  متقاطع‌اند.

$$\Delta : \widehat{H} = 90^\circ, AH = A'H$$



از آن‌جا که  $d$  و  $d'$  متقاطع هستند، پس موازی نبوده و در نتیجه شیب خط  $d$  و  $d'$  یکسان نخواهد بود. بنابراین در این حالت شیب خط حفظ نمی‌شود.

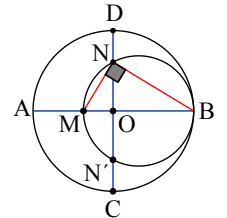
- ۹

$$AM = 16, DN = 10, OA = R \Rightarrow OM = R - 16$$

$$OB = R, ON = R - 10$$

$$\widehat{AMB} : \widehat{N} = 90^\circ, \widehat{O} = 90^\circ \Rightarrow ON^2 = OM \times OB$$

$$(R - 10)^2 = (R - 16) \times R$$



$$R^2 - 20R + 100 = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$\text{شعاع دایره کوچکتر} = \frac{BM}{2} = \frac{2R - AM}{2} = \frac{2 \times 25 - 16}{2} = 17$$

- ۱۰

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha \Rightarrow \text{مرکزی } \widehat{O} = \widehat{AC} = 2\alpha, \widehat{A} \text{ محاطی} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\Delta AOM : 75^\circ = \alpha + 2\alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$$

