

۱ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.
ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند.

۲ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟ ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۴ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

۲, ۴, ۸, ...

۵ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها ۴۵° است و نقطه $(۰, ۲)$ روی آن قرار دارد.

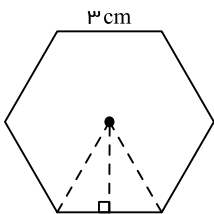
۶ اگر $۰ < \sin \alpha \times \cos \alpha < ۰$ ، آن‌گاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

۷ اگر $\tan \alpha = \frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۸ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $۲۷۰^\circ +$ (ب) ۲۲۵° (پ) $۱۳۵^\circ -$ (ت) ۱۸۵°

۹ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



۱۰ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. $(۰ < \alpha < ۹۰)$

الف) تنها زاویه α که \sin و \cos برابر دارد است.

ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، تانژانت زاویه‌ی است.

پ) سینوس زاویه‌ی برابر $\cos ۳۰^\circ$ است.

۱۱ درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

الف)

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

ب)

$$\frac{1}{\sin x} - \cot x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

۱۲ درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.



الف برای هر $a > 1$ داریم: $a^2 < a^3$

۱۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$\sqrt[3]{2^3 \sqrt{\sqrt{8}}} + (\sqrt[3]{\sqrt{2}})^3 - 2^{0.3} - 8^{\frac{1}{4}}$$

ب

$$(\sqrt{6} - \sqrt{5})^4 (\sqrt{6} + \sqrt{5})^4$$

۱۴ دو مورد را به انتخاب پاسخ دهید

هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^6 - y^6$ ب) $x^6 - y^6$ پ) $8a^3 + 27$ ت) $a^3 b^6 - 8$

۱۵ اگر $a + b = 7$ و $ab = 12$ باشد، حاصل $a^3 + b^3$ را بدست آورید.

۱۶ درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید. ($a \geq 0$)

الف) $\sqrt[5]{a^5} = a$ ب) $\sqrt[5]{(-a)^5} = a$

پ) $\sqrt[4]{(-a)^4} = -a$ ت) $\sqrt{a^2} = a$

۱۷ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) $\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots\dots$ (زوج n)

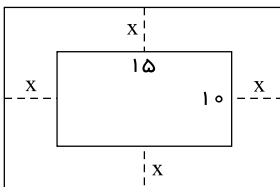
ب) $\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots\dots$ (فرد n)

۱۸ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 - 3x + 2} =$$

۱۹ یک عکس به اندازه 10 در 15 سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت 300 سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۲۰ یک جسم از بالای یک ساختمان که 13 متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از 13 متر خواهد بود؟

۲۱ یک مورد را به انتخاب پاسخ دهید

هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2 = 250$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0$

۳) $4a^2 + 3a = 1$

۴) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$



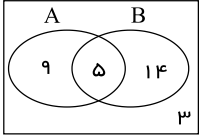
پاسخنامه تشریحی

۱ می‌دانیم: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

اگر گروه سرود را A و گروه تئاتر را B بنامیم، داریم:

فقط سرود $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 14 - 5 = 9$

فقط تئاتر $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 19 - 5 = 14$



الف) $n(A - B) = 9$

ب) $n(U) - n(A \cup B) = 31 - (9 + 5 + 14) = 31 - 28 = 3$

۲ هر سال ۲٪ افت قیمت داریم، بنابراین هر سال قیمت دوچرخه، ۸۰ درصد سال گذشته می‌شود یعنی قدر نسبت برابر ۰٫۸ است.

الف: بعد از گذشت ۳ سال یعنی در سال چهارم:

$$t_3 = t_1 r^3 = 500,000 \times (0,8)^3 = 500,000 \times \frac{512}{1000} = 256,000$$

ب: بعد از گذشت n سال یعنی سال $(n + 1)$ م:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_1 r^{n+1-1} = t_1 r^n \\ t_1 = 500,000, r = 0,8 \end{cases} \Rightarrow t_{n+1} = 500,000 \times (0,8)^n$$

۳ می‌دانیم: جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d برابر $t_n = t_1 + (n - 1)d$ است.

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 3 \\ t_1 + t_4 + t_5 = 39 \\ t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 \\ 3t_1 + 12d = 39 \end{cases}$$

$$9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

$$3t_1 + 3d = 3 \Rightarrow 3t_1 = 3 - 3d \stackrel{d=4}{=} 3 - 12 = -9 \Rightarrow t_1 = -3$$

دنباله: $-3, 1, 5, 9, \dots$

۴ می‌دانیم: حاصل جمع اعداد ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$

$2, 4, 8, \dots$

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{20} \Rightarrow 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{(1+2+\dots+20)} = 2^{\frac{20 \times 21}{2}} = 2^{210}$$

جمله بیستم

۵ شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$\begin{cases} m = \tan 45 = 1 \\ (0, 2) \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y - 2 = x \Rightarrow y = x + 2$$

۶ می‌دانیم:

$$AB < 0 \Rightarrow \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ربع اول} \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \\ \text{ربع دوم} \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \\ \text{ربع سوم} \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \\ \text{ربع چهارم} \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \end{cases}$$

علامت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ باید مختلف باشند.

$$I) \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع دوم } \alpha \quad II) \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم } \alpha$$

۷ می‌دانیم: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

ربع چهارم α
 $\cos \alpha > 0 \rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

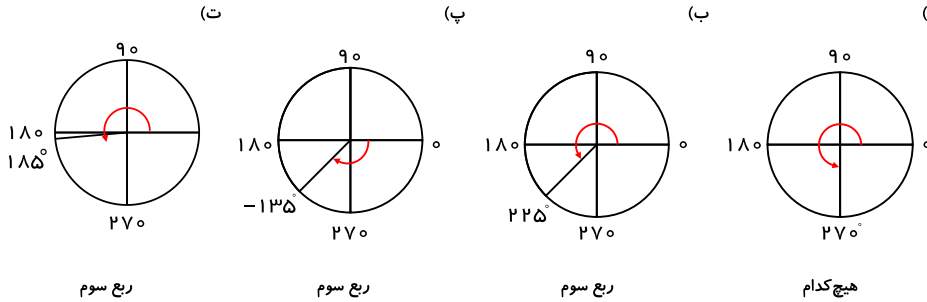
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha < 0} \rightarrow \sin \alpha = \frac{-4}{5}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

می‌دانیم:

- ربع اول: $0 < \alpha < 90$
- ربع دوم: $90 < \alpha < 180$
- ربع سوم: $180 < \alpha < 270$
- ربع چهارم: $270 < \alpha < 360$

خود زوایای $0, 90, 180, 270$ هیچ‌یک از ربع‌ها نیستند.



هر ۶ ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

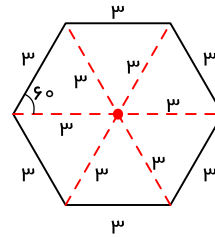
زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است

$$\theta = \frac{(n-2)}{n} \times 180$$

$$S_{\text{مثلث}} = 6 S_{\text{ضلعی ۶}}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{ضلعی ۶}} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



۱۰ الف) 45° ب) 30° پ) 60°

۱۱

الف)

$$1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - (1 - \sin x) = \sin x$$

ب)

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

۱۲

الف) درست

۱۳

الف)

$$\sqrt{2^0 \sqrt{2^{15}}} + \sqrt{2^3} - 2^0 \sqrt{2^3} - 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{3}{4}} = 0$$

ب)



$$[(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})]^r = \left[\underbrace{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2}_1 \right]^r = 1$$

۱۴

الف) $x^r - y^r = (x^r - y^r)(x^r + y^r) = (x - y)(x + y)(x^r + y^r)$

ب) $x^r - y^r = (x^r - y^r)(x^r + y^r) = (x - y)(x^r + xy + y^r)(x + y)(x^r - xy + y^r)$

پ) $8a^r + 27 = (2a)^r + 3^r = (2a + 3)(2a^r - 6a + 9)$

ت) $a^r b^r - 8 = (ab^r)^r - 2^r = (ab^r - 2)(a^r b^r + 2ab^r + 4)$

۱۵

$$a^r + b^r = (a + b)(a^r - ab + b^r)$$

$$(a + b)^r = a^r + b^r + 2ab = a^r + b^r + 2(12) = a^r + b^r + 24 = 49 \rightarrow a^r + b^r = 25$$

$$a^r + b^r = (a + b)(a^r + b^r - ab) = 7(25 - 12) = 7(13) = 91$$

۱۶ الف) درست (ب) نادرست: $\sqrt[5]{(-a)^5} = -a$

پ) نادرست: $\sqrt[4]{(-a)^4} = \sqrt[4]{a^4} = |a| = a$ (ت) درست

۱۷ الف) $|a| = \sqrt[n]{a^n}$ (زوج n) زیررادیکال به فرجه‌ی زوج هرگز عدد منفی قرار نمی‌گیرد.

ب) $\sqrt[n]{a^n} = a$ (فرد n) رادیکال با فرجه‌ی فرد محدودیتی ندارد.

۱۸

الف)

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2(x-2) - x(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{2x-4-x^2-x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{-x^2+x-4}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

۱۹

$$(2x + 15)(2x + 10) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$2x^2 + 25x - 75 = 0 \Rightarrow \Delta = (25)^2 - 4(2)(-75) = 625 + 600 = 1225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 35$$

$$x = \frac{-25 \pm 35}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-25 - 35}{4} = \frac{-60}{4} \\ x = \frac{-25 + 35}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \end{cases} \quad (\text{تغیق (طول مثبت است)})$$

$$x = 2,5 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 15 = 20 \\ 2x + 10 = 15 \end{cases}$$

۲۰

$$h > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t + 13 > 13 \Rightarrow -5t^2 + 18t > 0 \Rightarrow t(-5t + 18) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -5t + 18 = 0 \Rightarrow -5t = -18 \Rightarrow t = \frac{-18}{-5} = \frac{18}{5} \end{cases}$$

| | | | | |
|---------------|---|---|----------------|---|
| | | 0 | $\frac{18}{5}$ | |
| $-5t + 18$ | + | | + | - |
| t | - | 0 | + | + |
| $-5t^2 + 18t$ | - | 0 | + | - |

$\Rightarrow 0 < t < \frac{18}{5}$

۲۱

۱) $2x^2 = 250 \Rightarrow x^2 = 125 \Rightarrow x = \pm\sqrt{125}$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0 \Rightarrow z^2 - 6z + 9 = 0 \Rightarrow (z - 3)^2 = 0 \Rightarrow z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

$$۳) ۴a^۲ + ۳a = ۱ \Rightarrow ۴a^۲ + ۳a - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴(۴)(-۱) = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۵$$

$$a = \frac{-۳ \pm ۵}{۲ \times ۴} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-۳ + ۵}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \\ a = \frac{-۳ - ۵}{۸} = \frac{-۸}{۸} = -۱ \end{cases}$$

$$۴) b^۲ + \sqrt{۲}b - ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = (\sqrt{۲})^۲ - ۴(۱)(-۴) = ۲ + ۱۶ = ۱۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۸}$$

$$b = \frac{-\sqrt{۲} \pm \sqrt{۱۸}}{۲(۱)} = \frac{-\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲} \\ b = \frac{-\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{-۴\sqrt{۲}}{۲} = -۲\sqrt{۲} \end{cases}$$