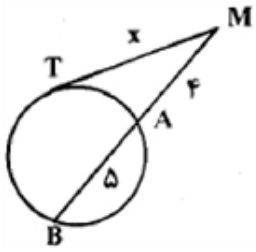
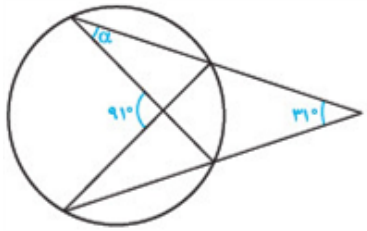
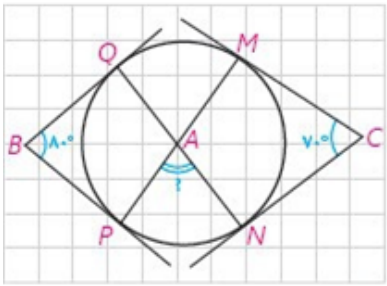
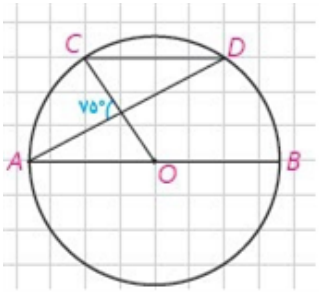
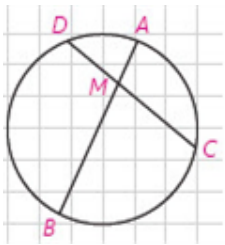
نام و نام خانوادگی : **عنوان آزمون :** نوبت اول هندسه ۲

پایه تحصیلی : یازدهم ریاضی **زمان آزمون :** ۸۰ دقیقه

نام دبیرستان: مشکات تبریز

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	در شکل زیر مقدار x را به دست آورید. 	۲
۲	در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را به دست آورید. 	۲
۳	در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟ 	۲

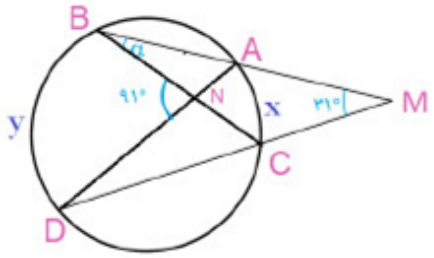
۴	در دایره رسم شده شکل مقابل $AB \parallel CD$، اندازه کمان CD را به دست آورید. 	۲
۵	در دایره‌ی $C(O, R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصله‌ی O از وتر AB را به دست آورید.	۲
۶	در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱\,cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟ 	۲

۷	طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.	۲
۸	طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آن‌ها ۱۶π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.	۲
۹	مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.	۲
۱۰	دو دایره به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه ی مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.	۲

۱

$MT^{۲} = MA \times MB$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^{۲} = ۴ \times ۹$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = ۶$ (۰/۲۵)

۲

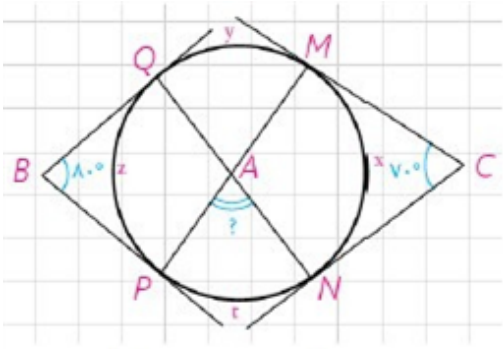


$\hat{M} = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۳۱° = y - x$

$\hat{N} = \frac{y + x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۹۱° = y + x$

$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۶۲° \\ y + x = ۱۸۲° \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۲۴۴° \Rightarrow y = ۱۲۲° \Rightarrow x = ۶۰°$

۳



$۷۰° = \frac{(y + z + t) - x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰° = (y + z + t) - x$

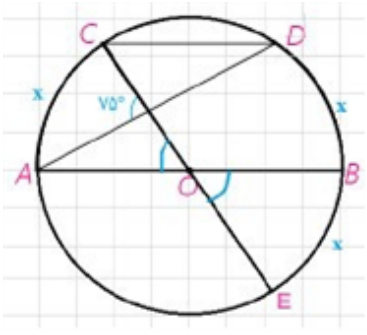
$۸۰° = \frac{(y + x + t) - z}{۲} \Rightarrow ۱۸۰° = (y + x + t) - z$

$\begin{cases} ۱۴۰° = y + z + t - x \\ ۱۶۰° = y + x + t - z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰° = ۲(y + t)$

$\Rightarrow y + t = ۱۵۰°$

$\hat{A} = \frac{y + t}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱۵۰°}{۲} = ۷۵°$

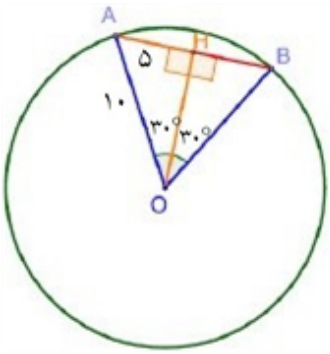
۴



$۷۵° = \frac{(x + x) + x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰° = ۳x \Rightarrow x = ۵۰°$

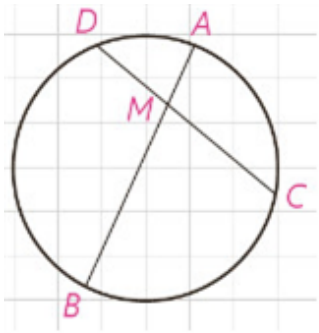
$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰° - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰° - ۱۰۰° = ۸۰°$

۵ می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH = ۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:



$$OH = \sqrt{OA^۲ - AH^۲} \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

۶



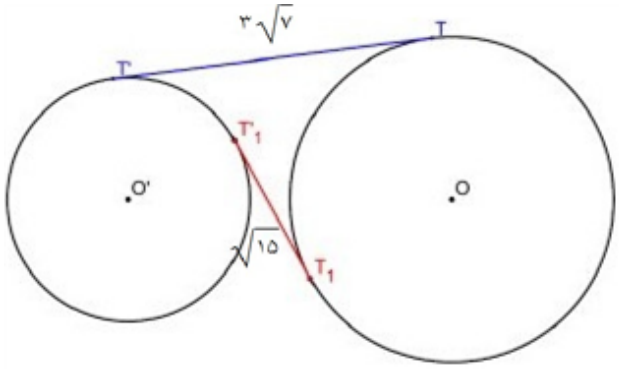
$$\frac{DM}{MC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{DM}{۹} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow DM = ۳ \Rightarrow MC = ۶$$

$$DM . MC = AM . BM \xrightarrow{AM = x} ۳ \times ۶ = x(۱۱ - x)$$

$$x^۲ - ۱۱x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۹)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad , \quad x = ۹$$

پس $\frac{AM}{MB} = \frac{۹}{۲}$ یا $\frac{AM}{MB} = \frac{۲}{۹}$

۷

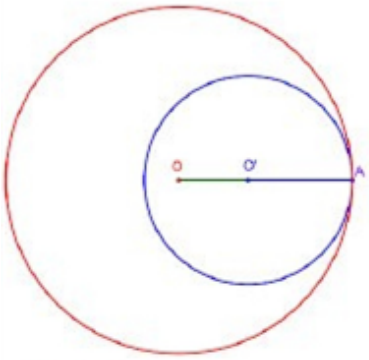


$$\begin{cases} TT'^۲ = d^۲ - (R^۲ - R')^۲ \\ T_۱T_۲^۲ = d^۲ - (R + R')^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^۲ \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

۸ با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:



مساحت ناحیه محدود بین دو دایره $= \pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۱۶\pi$

$\Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۱۶ \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$

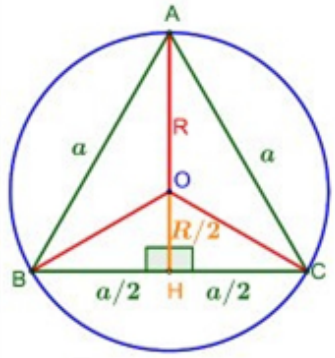
$\xrightarrow{OO' = R - R' = ۲} ۲(R + R') = ۱۶ \Rightarrow R + R' = ۸$

$\begin{cases} R + R' = ۸ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵ \, , \, R' = ۳$

۹ مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:

راه اول:

$$AB = BC = AC = a \quad , \quad BH = CH = \frac{a}{۲}$$

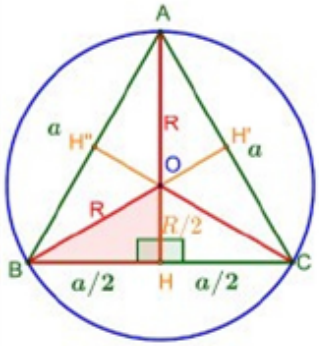


$$\left.\begin{array}{l} OH = \frac{OA}{۲} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{۲} = \frac{۳}{۲}R \\ \overset{\triangle}{ACH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^۲ + CH^۲} \\ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R \Rightarrow a = \frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a = R\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\left(R\sqrt{۳}\right)^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث هم‌نهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.



$$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^۲ - \left(\frac{R}{۲}\right)^۲} = \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = ۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

۱۰ در دو دایره مماس بیرون طول خط‌المرکزین با جمع شعاع‌ها برابر است.

$$d = oo' = R + R' \Rightarrow d = ۹ + ۴ = ۱۳$$

مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$