

پاسخ تشریحی ریاضی مهندسی - دکتری ۱۴۰۱

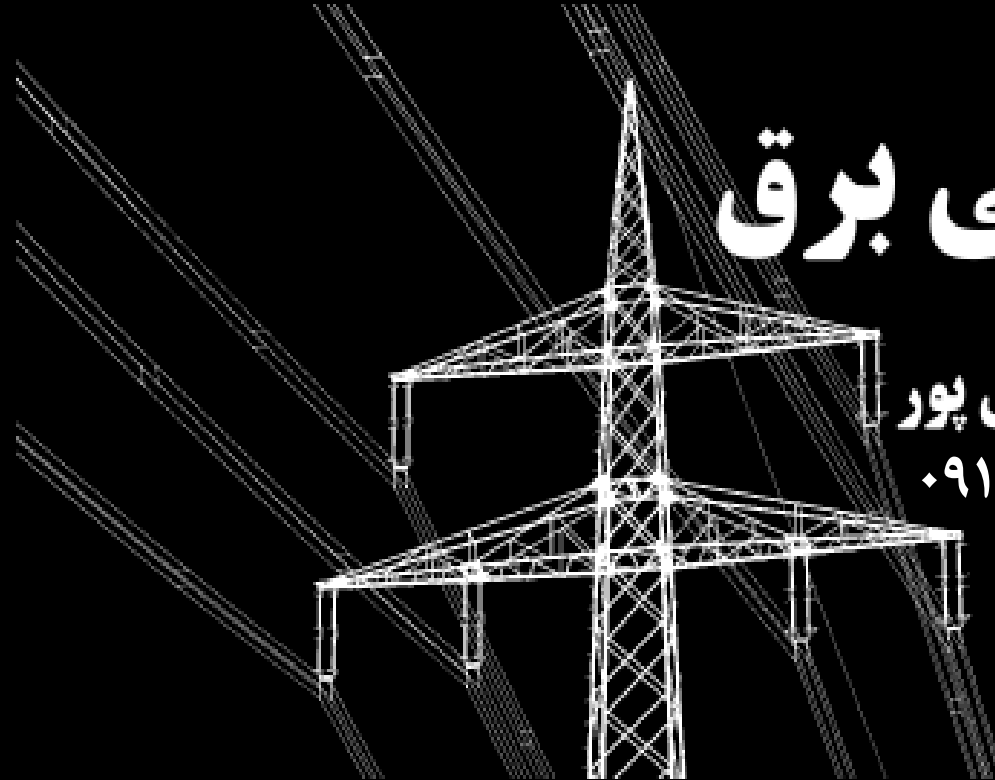
[www.OstadLink.com](http://www.OstadLink.com)

جامع ترین سامانه انتخاب معلم و مشاور خصوصی



مهندسی برق

امید نجفی پور  
۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱



۱- اگر  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ، آنگاه بسط لوران  $f$  در حوزه  $|z| > 2$  حول مبدأ مختصات کدام است؟

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{+1}{z-2}$$

$$\checkmark \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} \quad (1)$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{z^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{1}{z^{n+1}} \quad (3)$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \dots - \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) \right] = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \right) \quad (4)$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \dots \right]$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

۲- کدام تبدیل  $w = u + iv$ ، دایره‌ای به معادله  $x^2 + y^2 + 6\frac{1+r^2}{1-r^2}x + 9 = 0$  را روی دایره‌ای به معادله  $u^2 + v^2 = r^2$  می‌نگارد؟

$$\left(x + 3x \frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + y^2 + 9 - 9\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 = 0$$

$$w = \frac{z-3}{z+3} \quad (1)$$

$$w = \frac{z+3}{z-3} \quad (2)$$

$$w = 2\frac{z-3}{z+3} \quad (3)$$

$$w = 2\frac{z+3}{z-2} \quad (4)$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

۳- اگر  $u(x, t)$  جواب معادله  $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x + \sin 3x & 0 < x < \pi \end{cases}$  باشد، مقدار  $u(\frac{\pi}{2}, 1)$  کدام است؟

$$u(x, t) = \sum e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad n=1, 3$$

$$u(x, t) = e^{-9t} \sin(3x) + e^{-t} \sin(x)$$

$$u(\frac{\pi}{2}, 1) = \frac{-1}{e^9} + \frac{1}{e} = \frac{e^8 - 1}{e^9}$$

$$\frac{e^f + 1}{e^r} \quad (1)$$

$$\frac{e^r - 1}{e^r} \quad (2)$$

$$\frac{e^{10} + 1}{e^9} \quad (3)$$

$$\checkmark \frac{e^8 - 1}{e^9} \quad (4)$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

۴- با استفاده از قضیه مانده‌ها حاصل انتگرال  $\oint_{z=1} z^m e^z dz$  ، کدام است؟

$$z^m \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{(m+1)! z^{m+1}} + \dots \right)$$

$$\frac{\pi i}{(m+1)!} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi i}{m!} \quad (2)$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(m+1)!} \rightarrow \Gamma = 2\pi i a_{-1} = \frac{2\pi i}{(m+1)!} \quad (3)$$

$$\frac{\pi i}{m!} \quad (4)$$

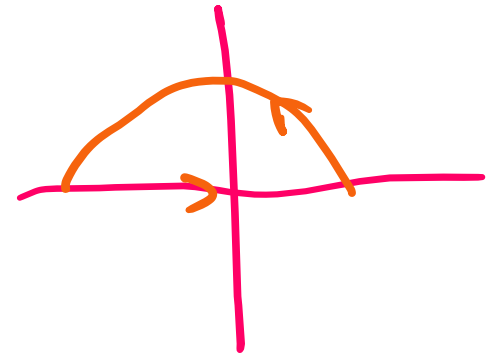
۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

$$i = j = \sqrt{-1}$$

۵- حاصل انتگرال کوشی  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$  ، کدام است؟

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{(x+1)^2 + 1} dx \quad \bullet 913 \cdot 3942 \cdot 01$$

$$\text{Im} \left[ \oint \frac{z e^{jz}}{(z+1)^2 + 1} \right]$$



$$\text{Im} \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi i \frac{z e^{jz}}{(z+1+j\epsilon)} \right]$$

$$\frac{\pi}{2e} (\sin 1 - \cos 1) \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2e} (\cos 1 + \sin 1) \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{e} (\sin 1 - \cos 1) \quad (3)$$

$$\checkmark \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1) \quad (4)$$

$$\text{Im} \left[ \frac{\pi i (-1+j) e^{-j-1}}{2} \right] = \text{Im} \left[ \pi (-1+j) e^{-1} (\cos 1 - j \sin 1) \right]$$

۶- حاصل عبارت  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{1+z+z^2+z^3}$  ، کدام است؟

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)(z^2+1)}$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{(1+i) \times 2i} + \frac{1}{(1-i) \times (-2i)} \right]$$

(۱)  $-\pi i$   
 (۲)  $-\frac{\pi}{2}i$   
 (۳) صفر ✓  
 (۴)  $\pi i$

$$= 2\pi i \times 0 = 0$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

۷- اگر  $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + k^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-kx}$  باشد، حاصل عبارت  $\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + 64} d\omega$  کدام است؟

(راهنمایی:  $\sin \alpha x = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})$ )

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w x e^{iw}}{(w^2 + 16i)(w^2 - 16i)} dw \right]$$

$$\frac{\pi}{16} e^{-2x} \sin 2x \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{16} e^{-2x} \cos 2x \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{4} e^{-x} \sin x \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} e^{-x} \cos x \quad (4)$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱



۸- فرض کنید  $\ln$  شاخه اصلی لگاریتم است. در این صورت حاصل انتگرال  $\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(z)}{(z+i)^3} dz$  کدام است؟

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow -i} \left[ \frac{1}{2!} (\ln(z))'' \right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{-1}{2z^2} = \frac{1}{2}$$

- $-\pi$  (۱)
- $\pi i$  (۲) ✓
- $-2\pi$  (۳)
- $2\pi i$  (۴)

$$I = 2\pi i \times a_{-1} = \pi i$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

۹- اگر ناحیه  $|z|=2$  را تحت رابطه  $w = z + \frac{2}{z}$  نگاشت کنیم، مساحت ناحیه نگاشت شده چقدر است؟

$$w = 2e^{j\theta} + e^{-j\theta}$$

$$w = 2\cos\theta + j\sin\theta$$

$$z = 2e^{j\theta}$$

- (۱)  $2\pi$
- (۲)  $3\pi$  ✓
- (۳)  $4\pi$
- (۴)  $6\pi$

بررسی  $\left\{ \begin{array}{l} u = 2\cos\theta \\ v = \sin\theta \end{array} \right. \rightarrow \frac{u^2}{4} + v^2 = 1 \rightarrow a=2, b=1$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

$$S = \pi ab = 2\pi$$

۰۹۱۳۰۳۹۴۲۰۱

۱۰- جواب معادله دیفرانسیل مشتقات نسبی  $U_{tt} = U_{xx}$  ، کدام است؟  
 $U(0, t) = U(\pi, t) = U(x, 0) = 0$   
 $U_t(x, 0) = k \sin 3x - \frac{k}{4} \sin 6x \rightarrow n = 3, 4$

$$3A_3 = k \rightarrow A_3 = \frac{k}{3}$$

$$4A_4 = -\frac{k}{4} \rightarrow A_4 = -\frac{k}{16}$$

$$U(x, t) = \frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x - \frac{k}{16} \sin 6t \sin 6x \quad (1) \checkmark$$

$$U(x, t) = \frac{k}{4} \sin 4t \sin 3x - \frac{k}{16} \sin 6t \sin 6x \quad (2)$$

$$U(x, t) = \frac{k}{3} \sin 3t \sin 3x - \frac{k}{4} \sin 4t \sin 6x \quad (3)$$

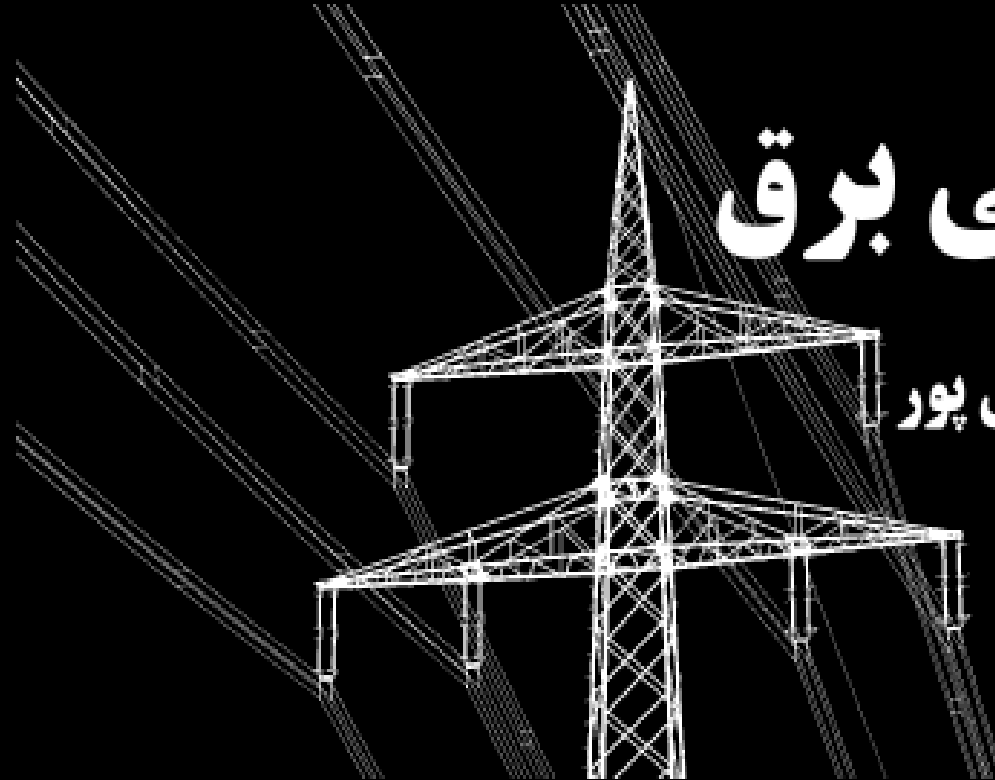
$$U(x, t) = \frac{k}{9} \sin 9t \sin 3x - \frac{k}{16} \sin 6t \sin 6x \quad (4)$$

$$U(x, t) = \sum_n A_n \sin(nt) \sin(nx)$$

پایان حل تشریحی ریاضی مهندسی – کنکور دکتری ۱۴۰۱

[www.OstadLink.com](http://www.OstadLink.com)

جامع ترین سامانه انتخاب معلم و مشاور خصوصی



مهندسی برق

امید نجفی پور